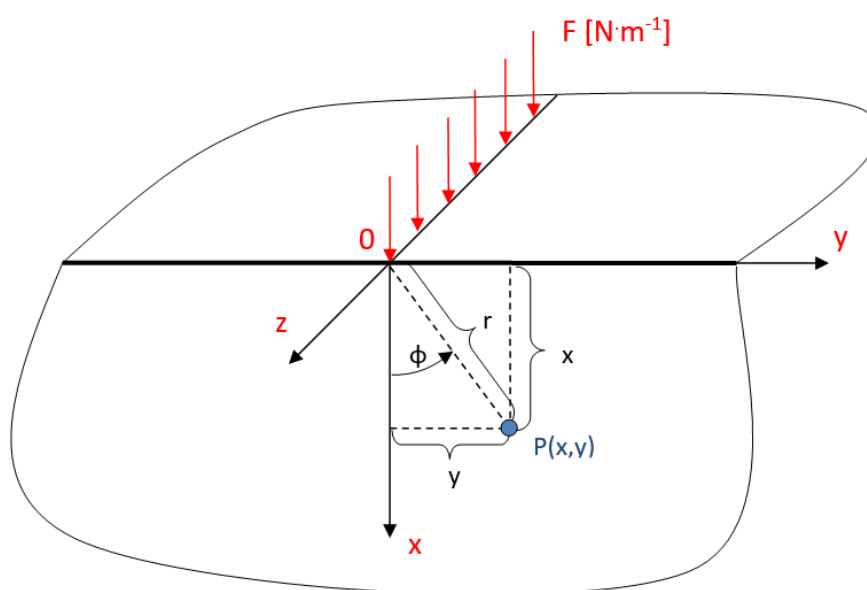


*Osamělá liniová síla působící na rovinnou hranici pružného poloprostoru
(Flamantova úloha)*

Ke stanovení distribuce normálového resp. smykového napětí pod kontaktním povrchem je využijeme řešení Flamantovy úlohy, které bude podrobně rozebráno v následující kapitole. V případě Flamantovy úlohy se jedná o liniovou sílu, působící kolmo na hranici pružného poloprostoru (Obr. 1). Funkce napětí řešící daný problém je následujícího tvaru:

$$\varphi = -\frac{F}{\pi} \cdot r \cdot \phi \cdot \sin\phi, \quad (1)$$



Obrázek 1: Souřadný systém při řešení Flamantovy úlohy

Výše uvedená funkce napětí zároveň splňuje biharmonickou rovnici v polárních souřadnicích ve tvaru:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi^2} \right) = 0, \quad (2)$$

příčemž složky tenzoru napjatosti jsou definovány následovně:

$$\sigma_\phi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \quad (3)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi^2}, \quad (4)$$

$$\tau_{r\phi} = - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}, \quad (5)$$

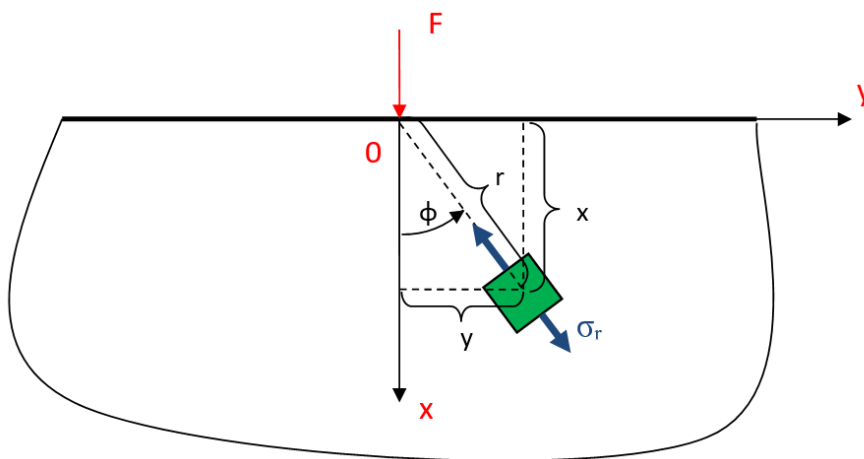
σ_ϕ vyjadřuje tečné napětí, σ_r definuje radiální napětí a $\tau_{r\phi}$ vyjadřuje smykové napětí. Po dosažení funkce napětí φ do výrazů (3), (4) a (5), obdržíme výsledné vztahy pro jednotlivá napětí vyjádřené prostřednictvím funkce napětí φ :

$$\sigma_\phi = 0 \quad (6)$$

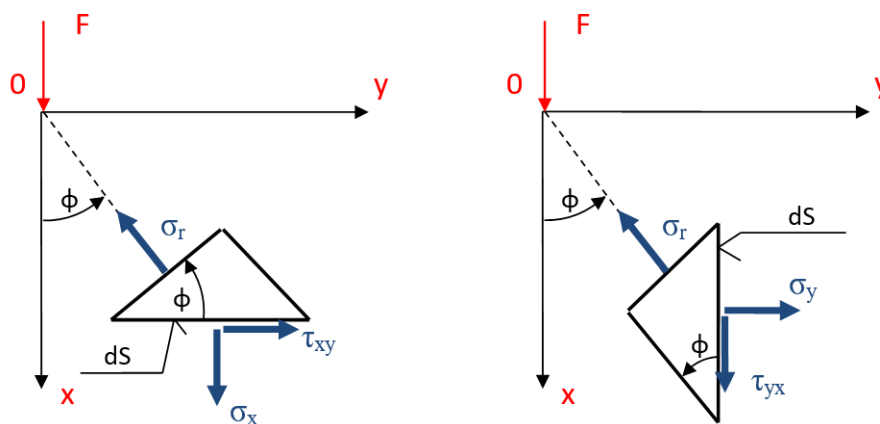
$$\sigma_r = - \frac{2F \cos \phi}{\pi r}, \quad (7)$$

$$\tau_{r\phi} = 0, \quad (8)$$

V následujícím kroku vyjádříme jednotlivé složky napětí v kartézských souřadnicích ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) pomocí radiálního napětí σ_r . Pro uvedený krok využijeme rovnice rovnováhy sil v horizontálním a vertikálním řezu elementární krychle (Obr. 2,3) .



Obrázek 2: Působící radiální napětí na elementu



Obrázek 3: Horizontální (vlevo) a vertikální řez elementární krychle

Sestavením rovnic rovnováhy sil ve směrech os x a y obdržíme:

$$\sigma_x = \sigma_r \cdot \cos^2 \phi, \quad (9)$$

$$\sigma_r = \sigma_r \cdot \sin^2 \phi, \quad (10)$$

$$\tau_{r\phi} = \sigma_r \cdot \cos \phi \sin \phi. \quad (11)$$

Dále platí:

$$\cos \phi = \frac{x}{r}, \quad (12)$$

$$\sin \phi = \frac{y}{r}, \quad (13)$$

$$\cos^2 \phi = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad (14)$$

$$\sin^2 \phi = \frac{y^2}{x^2 + y^2}, \quad (15)$$

$$\cos \phi \sin \phi = \frac{xy}{x^2 + y^2}. \quad (16)$$

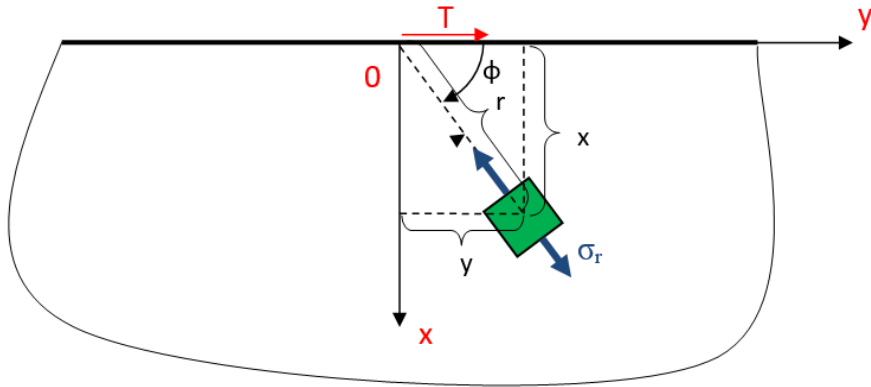
Po dosazení vztahu pro radiální napětí (7) do výrazů (9)÷(11) a s využitím vztahů (12)÷(16) dostáváme:

$$\sigma_x = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (17)$$

$$\sigma_y = -\frac{2F}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (18)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (19)$$

Obdobným způsobem získáme vztahy pro jednotlivé složky napětí v kartézských souřadnicích, jedná-li se o tečnou sílu T , která rovněž působí v počátku souřadného systému (Obr. 4). Po-
dotkněme, že úhel ϕ je nyní odměřován od (kladné) osy y , v jejímž směru působí tečná síla T .



Obrázek 4: Tečná síla působící v počátku souřadného systému

Konečné vztahy pro jednotlivé složky napětí v kartézských souřadnicích pro výše uvedený případ jsou následující:

$$\sigma_x = -\frac{2T}{\pi} \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (20)$$

$$\sigma_y = -\frac{2T}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (21)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2T}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (22)$$

Budeme-li uvažovat o případě, kdy bude v počátku SS působit normálová a zároveň tečná síla, je možné využít principu superpozice. Následně bude platit:

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{Fx^3 + Tx^2y}{(x^2 + y^2)^2} \right], \quad (23)$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{Fxy^2 + Ty^3}{(x^2 + y^2)^2} \right], \quad (24)$$

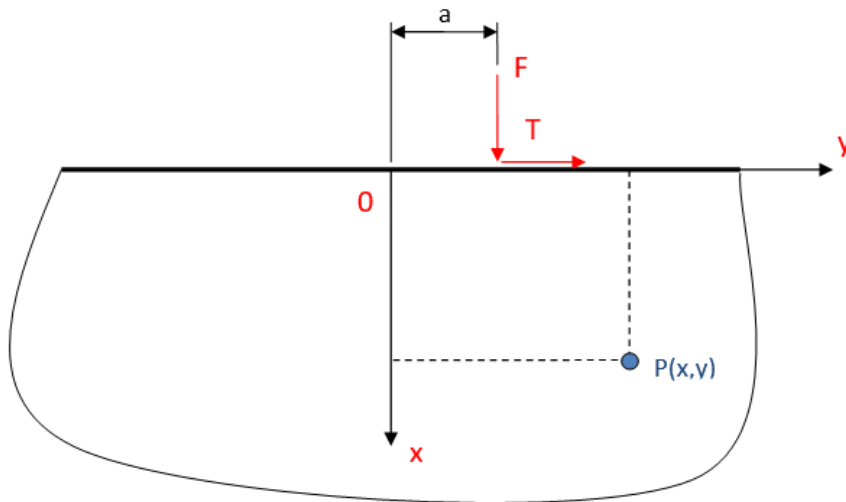
$$\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{Fx^2y + Txy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right]. \quad (25)$$

Bude-li působiště sil F a T mimo počátek souřadnic (Obr. 5), například ve vzdálenosti a , je nutné modifikovat výrazy (23), (24) a (25) pro jednotlivé složky napětí tak, jak je uvedeno v následujících vztazích:

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{Fx^3 + Tx^2(y-a)}{(x^2 + (y-a)^2)^2} \right], \quad (26)$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{Fx(y-a)^2 + T(y-a)^3}{(x^2 + (y-a)^2)^2} \right], \quad (27)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{Fx^2(y-a) + Tx(y-a)^2}{(x^2 + (y-a)^2)^2} \right]. \quad (28)$$



Obrázek 5: Tečná síla působící v počátku souřadného systému

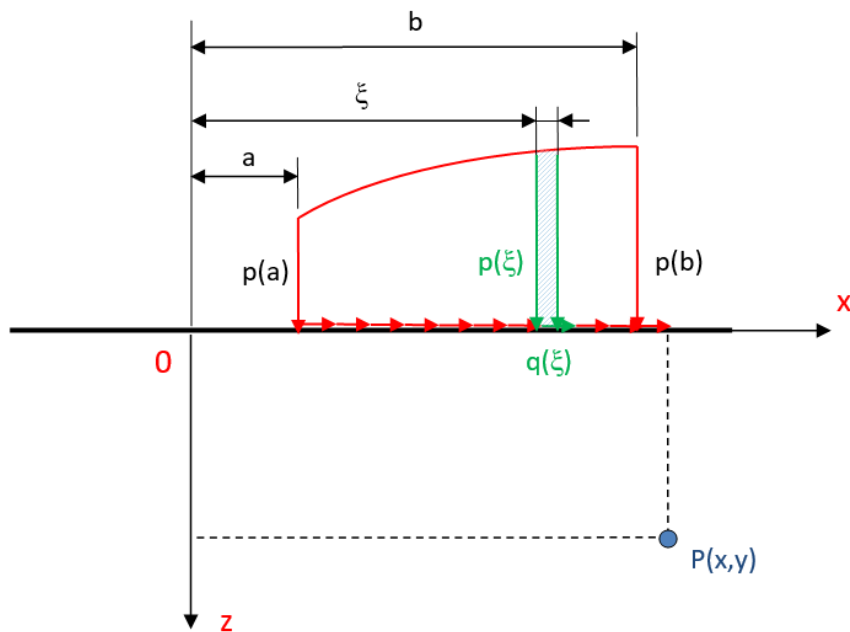
V případě, že bude na hranici pružného poloprostoru působit tlakové resp. tečné zatížení o určitém průběhu (Obr. 6) a navíc, zaměníme-li souřadné osy tak, jak je zobrazeno na obrázku

6, je možné vztahy (26)÷(28) modifikovat do následující podoby:

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{p(\xi)(x-\xi)^2 z + q(\xi)(x-\xi)^3}{((x-\xi)^2 + z^2)^2}, \quad (29)$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{p(\xi)z^3 + q(\xi)(x-\xi)z^2}{((x-\xi)^2 + z^2)^2}, \quad (30)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{p(\xi)(x-\xi)z^2 + q(\xi)(x-\xi)^2 z}{((x-\xi)^2 + z^2)^2}. \quad (31)$$



Obrázek 6: Působící tlakové a tečné zatížení na hranici pružného poloprostoru