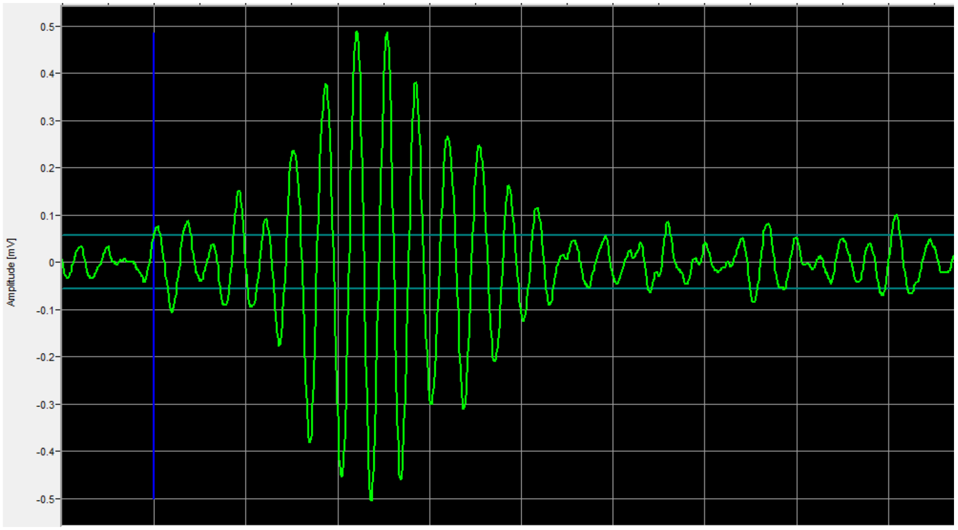
Základy zpracování signálu

Úvodem

- Signál (lat. signum) bychom mohli definovat jako záměrný fyzikální jev, nesoucí informaci o nějaké události.
- Signálem je rovněž funkce, která převádí nezávislou proměnnou na určitou hodnotu.
- Například, v případě měření akustické emise jednotlivé signály reprezentují tzv. hity akustické emise.
- Každý hit nese určitou informaci o svém původci – zdroji.
- Hit charakterizujeme počtem překmitů nad prahovou úroveň, dobou náběhu, počtem překmitů do dosažení maximální amplitudy, maximální amplitudou, dobou trvání atd.



Základní druhy signálů, jejich zpracování a charakteristiky

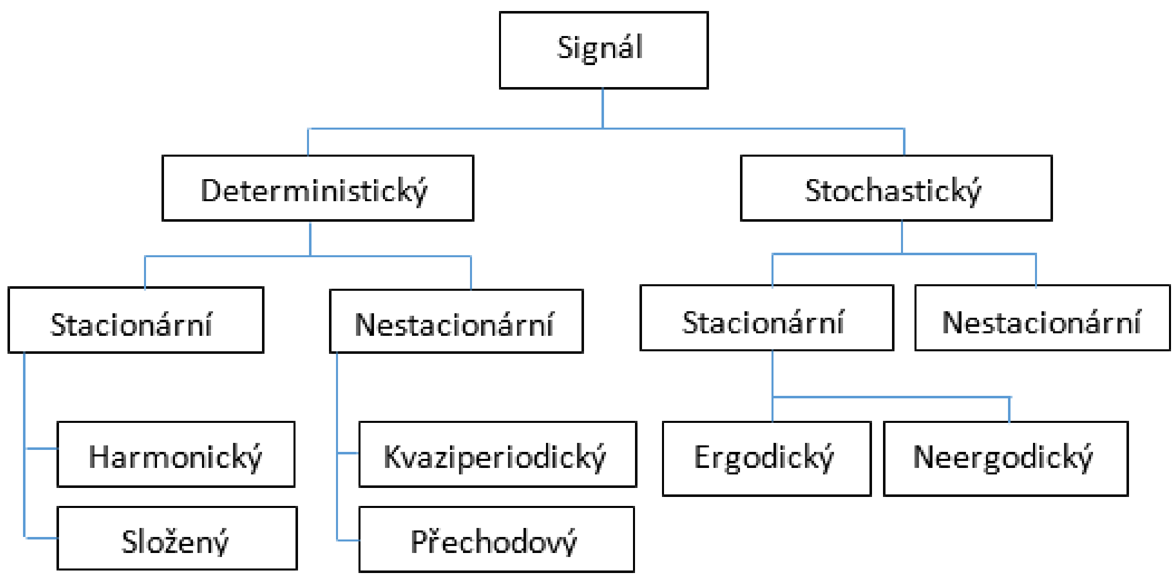
- Dle spojitosti nezávislé proměnné je možné rozdělit signály na:

(Pozn.: V drtivé většině případů budeme za nezávislou proměnnou považovat čas)

Signály se spojitým časem s(t), kde t∈R

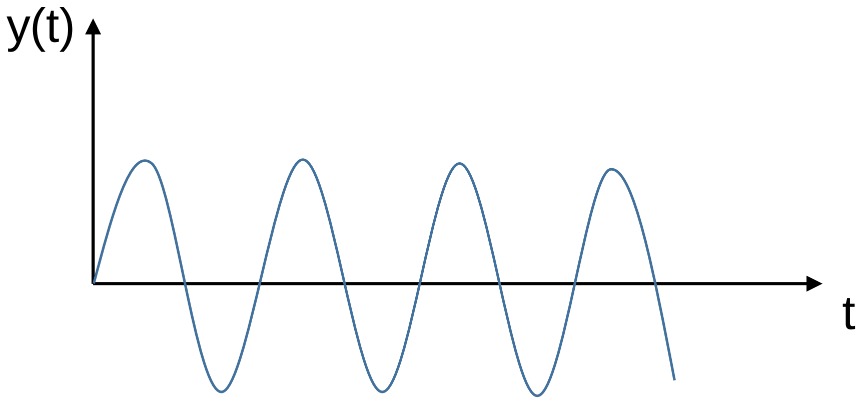
Signály s diskrétním časem s[n], kde t∈N

Podle časového průběhu lze signály rozdělit následovně:



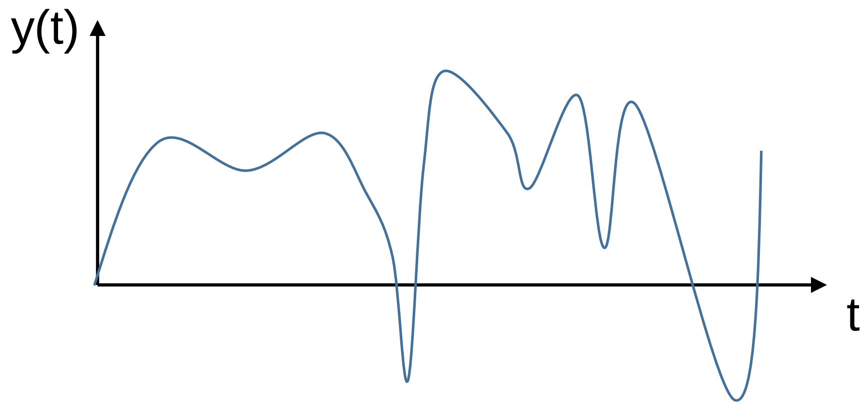
Základní druhy signálů, jejich zpracování a charakteristiky

- **Deterministický signál** je takový, který při opakování experimentu má opět stejný průběh.
- Většinu deterministických signálů lze popsat matematických předpisem.



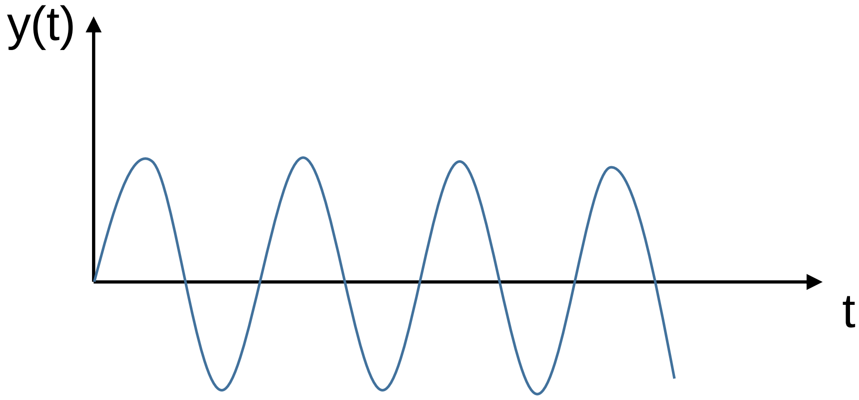
- **Náhodný (stochastický) signál** je zobecněním deterministického signálu, kdy při každém měření získáme určitý, ale předem neznámý průběh tohoto druhu signálu

- Stochastický signál nelze popsat matematickou funkcí
- Nutné využít pravděpodobnostní přístup

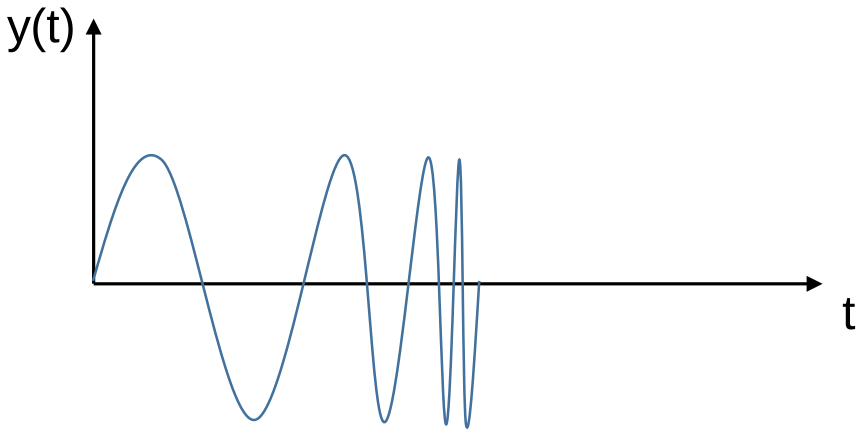


Základní druhy signálů, jejich zpracování a charakteristiky

- Stacionární signál je takový, který je nezávislý na poloze počátku časové osy.



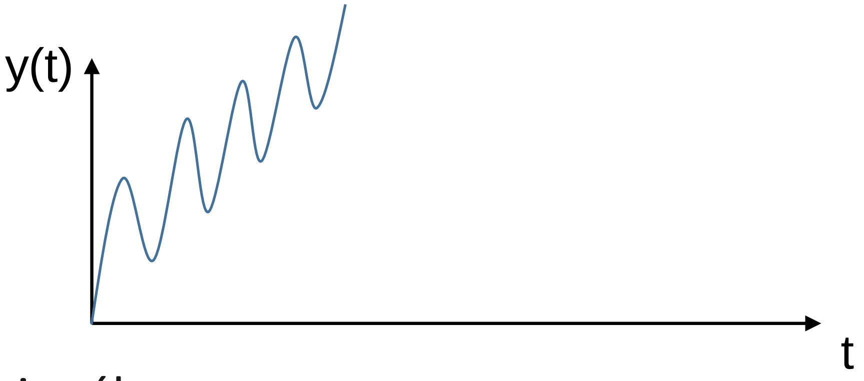
- Nestacionární signál je naproti tomu závislý na poloze počátku časové osy.



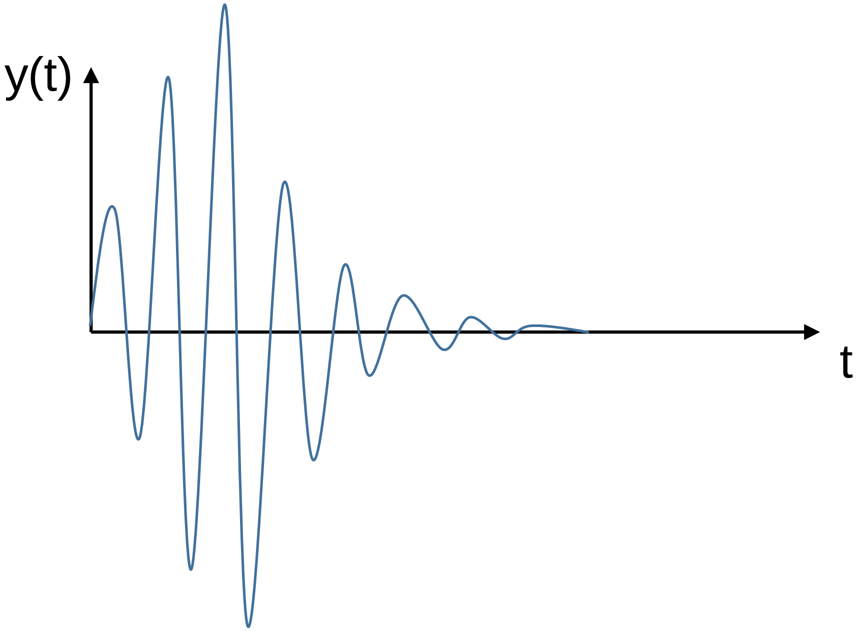
- Ergodický signál se vyznačuje tím, že jeho charakteristiky lze stanovit z jednoho měření. U neergodických signálů tomu tak logicky není.

Základní druhy signálů, jejich zpracování a charakteristiky

- Kvaziperiodický signál (disponuje určitými známkami periodicity)

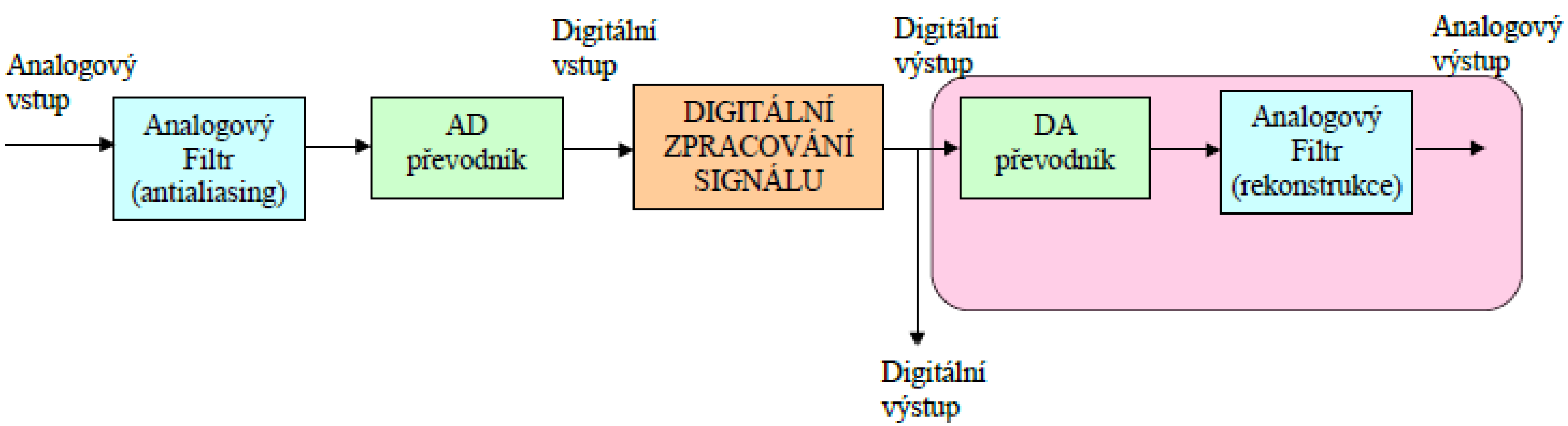


- Přechodový signál



Základní schéma zpracování signálu

- Na nasnímaný analogový signál se obvykle aplikují filtry (pasivní [*pasivní elektrotechnické součástky – rezistor/kapacitor/induktor*] vs. aktivní [*tranzistor/operační zesilovač*]), poté se pomocí AD převodníku signál digitalizuje a zpracovává.
- V některých případech však požadujeme zpětnou rekonstrukci na analogový signál (zvuková karta, MP3 přehrávač, GSM atd.), k tomu nám slouží DA převodník včetně dedikovaných filtrů.



Zdroj: http://www.umt.fme.vutbr.cz/~ruja/vyuka/ZZS/zzs.html

Základní parametry používané k popisu diskrétního signálu

- Energie signálu: $$E = \sum_{n=1}^{N} |x(n)|^2$$

- Výkon signálu (průměrný): $$P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

- RMS (Root Mean Square): $$y_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y(n)^2}$$

- RMS vyjadřuje efektivní hodnotu AC signálu

Digitalizace signálu

1. Vzorkování

- Vzorkování umožňuje diskretizovat definiční obor na konečný počet podmnožin.

- Vzorkování signálu je podmíněno Shannon-Kotělnikovým teorémem:

Každou funkci času s omezeným frekvenčním spektrem je možné nahradit posloupností diskrétních vzorků odebíraných s periodou Tsample, která je rovna nejvýše polovině převrácené hodnoty nejvyšší frekvence fmax obsažené ve vzorkovaném signálu.

Platí: $f_{sampling} = \frac{1}{T_{sample}} \geq 2f_{max}$ *, přičemž* $f_{sampling}$ *je frekvence, s jakou vzorkování realizujeme.*

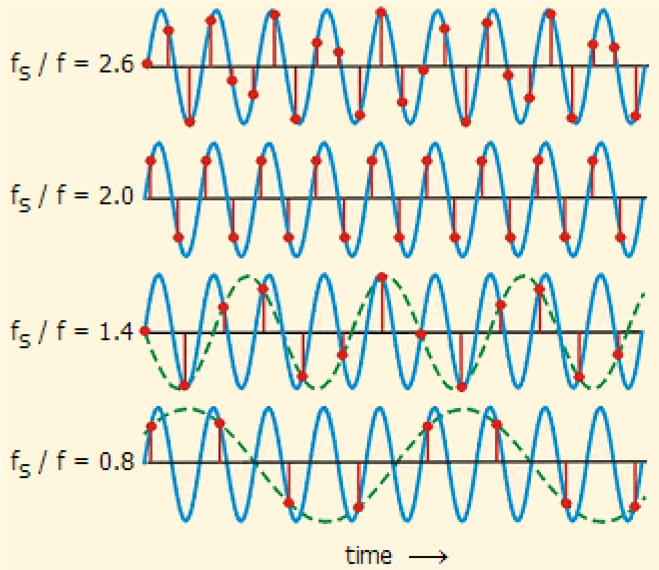
- Uvedená podmínka je také uváděna jako Nyquistova podmínka.

- V případě, že nedodržíme výše uvedenou podmínku, hrozí zkreslení typu aliasing.

- K minimalizaci aliasingu se používají antialiasingové filtry, konkrétně **Čebyšelův**, **Besselův** nebo **Butterworthův**.

Digitalizace signálu

1. Vzorkování



Zdroj: http://195.134.76.37/applets/AppletNyquist/Appl_Nyquist2.html

- V praxi se ustálilo používání následujících vzorkovacích frekvencí:

32 kHz – pro zvukové signály s horní mezní frekvencí 16 kHz

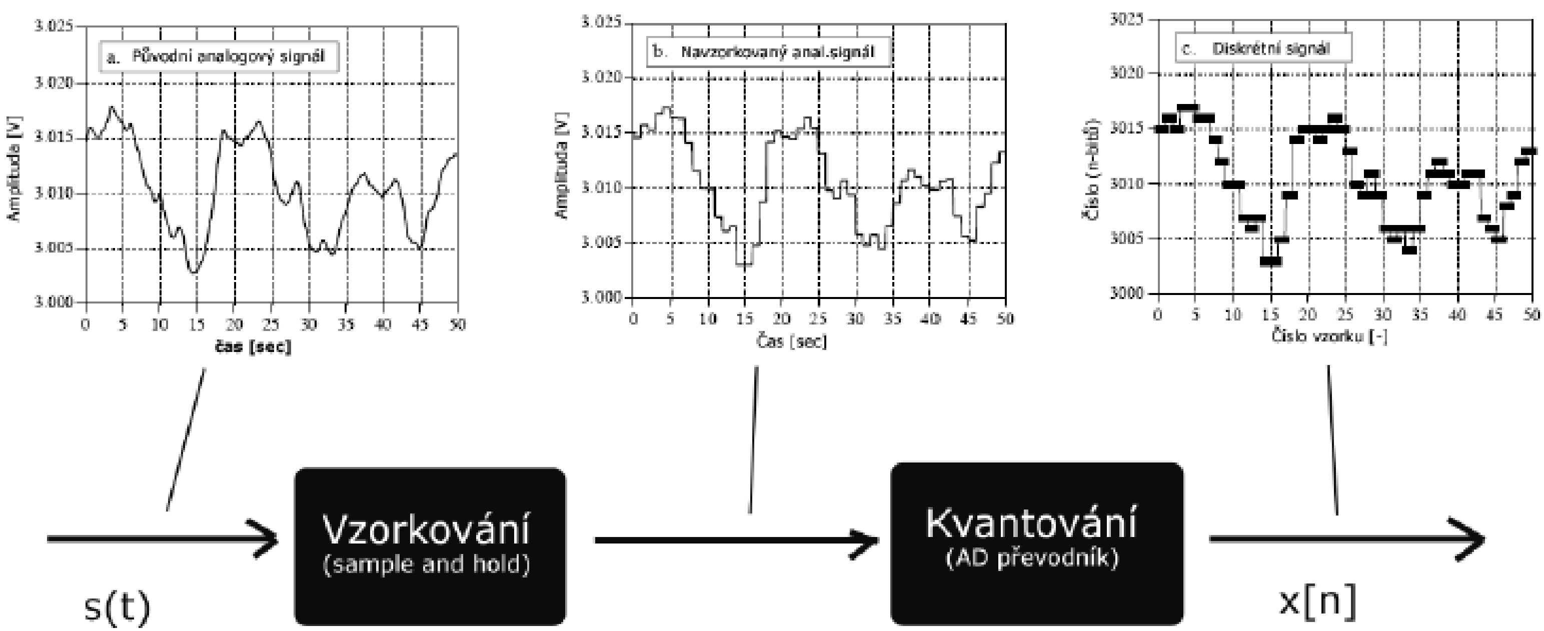
44,1 kHz – pro audiopřístroje (CD/DVD)

48/96 kHz – pro high-end studia

Digitalizace signálu

2. Kvantování

- Kvantováním se rozumí náhrada funkčních hodnot hodnotami zaokrouhlenými. Jedná se o proces ztrátový a zároveň i nevratný. Počet kvantizačních úrovní u A/D převodníků je vyjádřen v N-té mocnině čísla 2



Zdroj: http://www.umt.fme.vutbr.cz/~ruja/vyuka/ZZS/zzs.html

Integrální transformace

Fourierova transformace

- Fourierovou transformací se rozumí integrální transformace, která převádí signál mezi časovou a frekvenční oblastí s využitím harmonických funkcí sin a cos (obecně funkcí komplexní exponenciály).
- Povaha signálu v časové oblasti může být jak spojitá, tak i diskrétní. Pro spojitý signál je Fourierova transformace definována následovně:

$$C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ikt}\, dt, k = \frac{2\pi n}{T}$$

- Pro inverzní Fourierovu transformaci platí:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikt}\, dk$$

V souvislosti s digitálním signálem se výhradně využívá diskrétní Fourierovy transformace, jejími vstupy a výstupy jsou posloupnosti hodnot:

$$C(k) = \sum_{0}^{N-1} f(t) e^{-ikt} \; pro \; k = 0,1, \dots, N-1$$

Integrální transformace

Fourierova transformace

- Přičemž pro inverzní transformaci platí:

$$f(t) = \frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1} \mathrm{C}(k)e^{ikt} \; pro\ t = 0,1,\dots,N-1$$

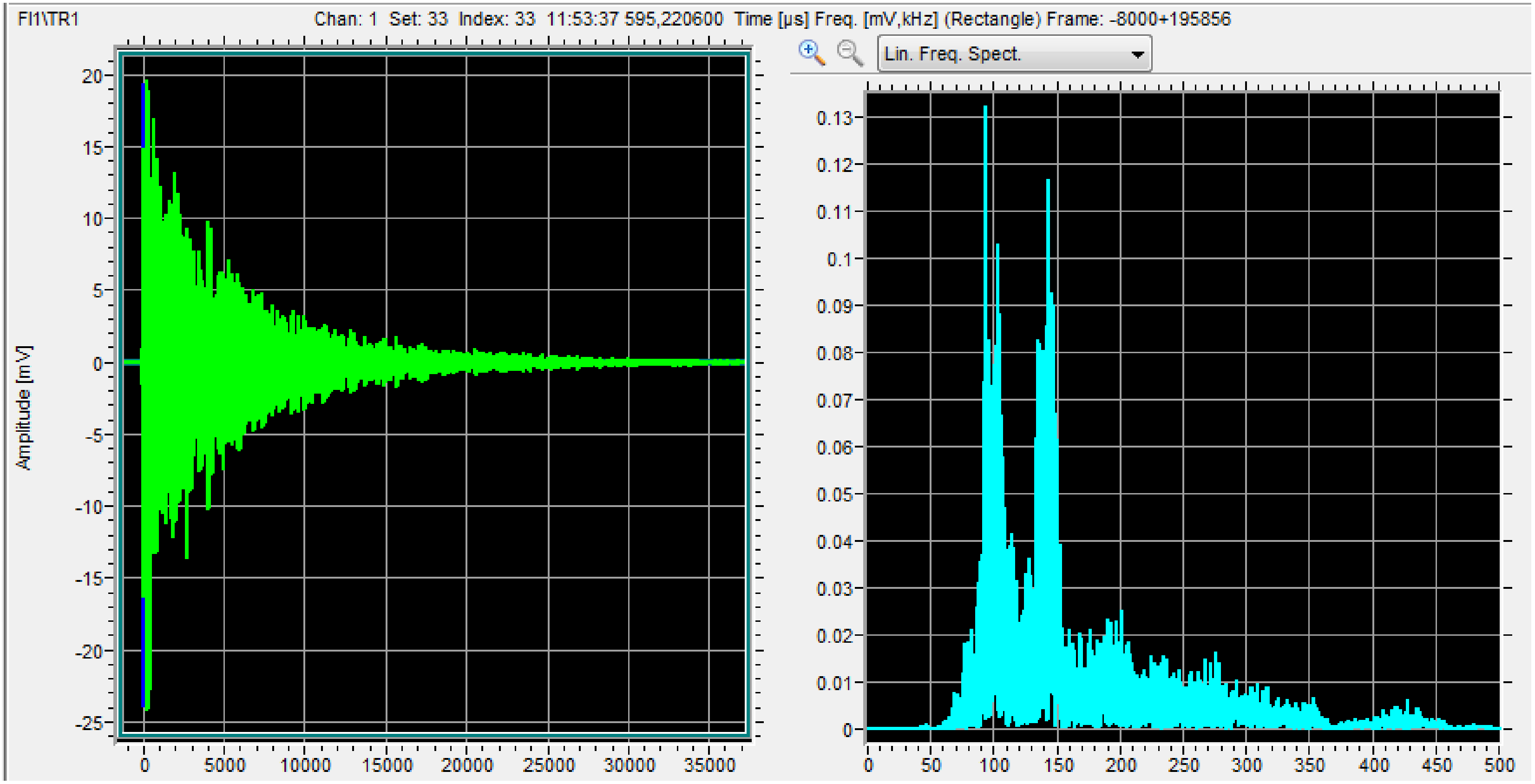
- Frekvenční rozlišení je funkcí vzorkovací frekvence $f_{sampling}$ a počtu N vzorků (Počet vzorků je ve většině případů roven 2^t, kde t ∈N):

$$f_a(f) = \frac{f \cdot f_{sampling}}{N}$$

- Velkou nevýhodou diskrétní Fourierovy transformace je její časová náročnost. Výpočet DFT pro N vzorků vyžaduje realizaci N^2 komplexních součinů a N^2 komplexních součtů.
- V šedesátých letech 20. století byl popsán efektivní algoritmus (Cooley – Tukey algoritmus) výpočtu diskrétní Fourierovy transformace – tzv. Rychlá Fourierova transformace (FFT) .

Integrální transformace

Fourierova transformace



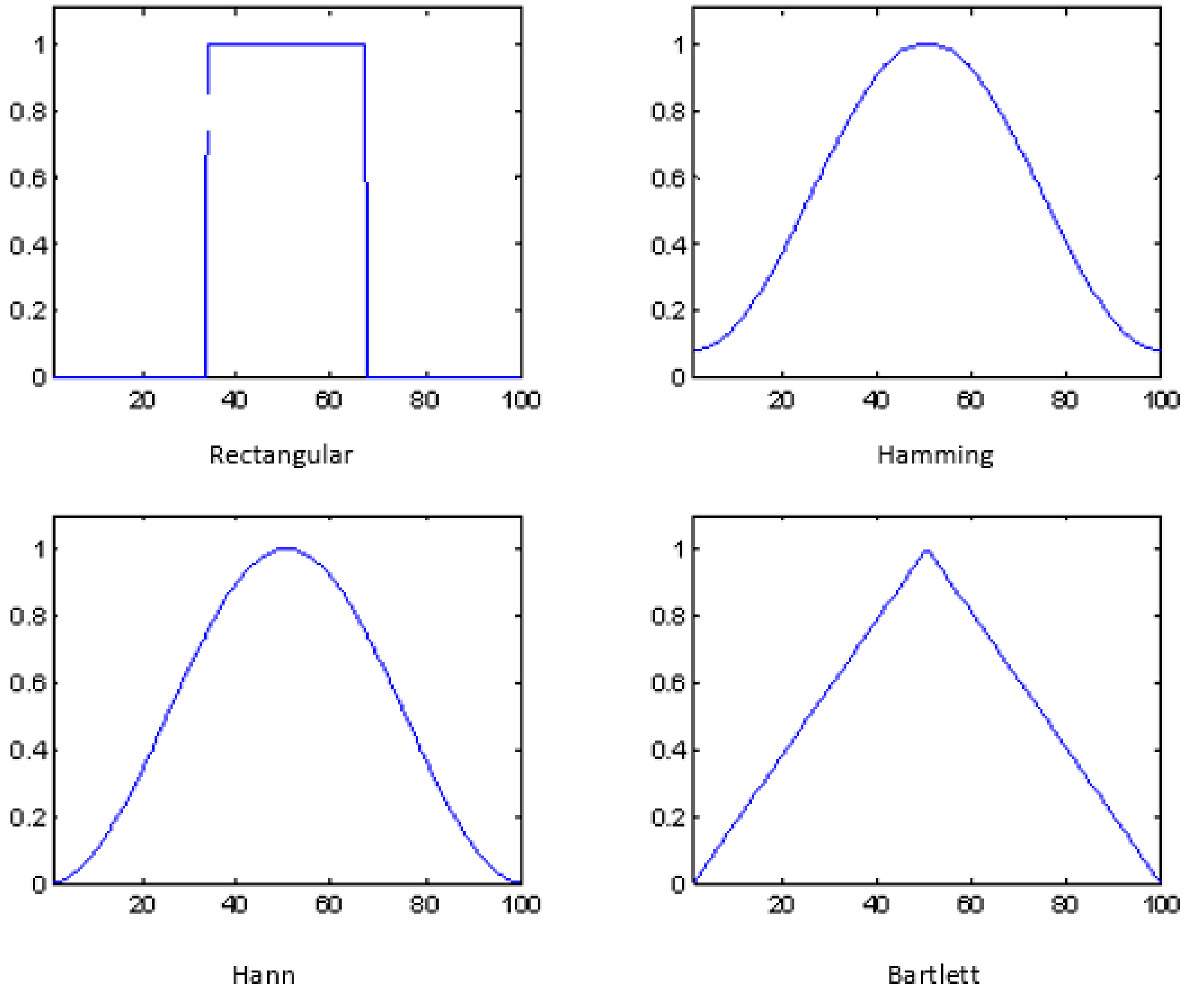
Integrální transformace

Fourierova transformace

- Pro aplikaci FFT je žádoucí, aby vzorek časové funkce daného děje reprezentoval periodicky se opakující signál.
- Z praxe však víme, že na periodické signály je možné narazit velmi zřídka.
- Je nicméně žádoucí, aby vzorek začínal a končil ve stejném bodě.
- Pokud tomu tak není, můžeme narazit na tzv. spektrální únik (spectral leakage) jehož důsledkem je generace nerelevantních frekvenčních komponent, které podstatnou měrou zkreslují výsledek.
- Onu „vynucenou“ periodicitu je možné řešit prostřednictvím tzv. časových oken, která vhodně modifikují oba okraje časového vzorku signálu

Integrální transformace

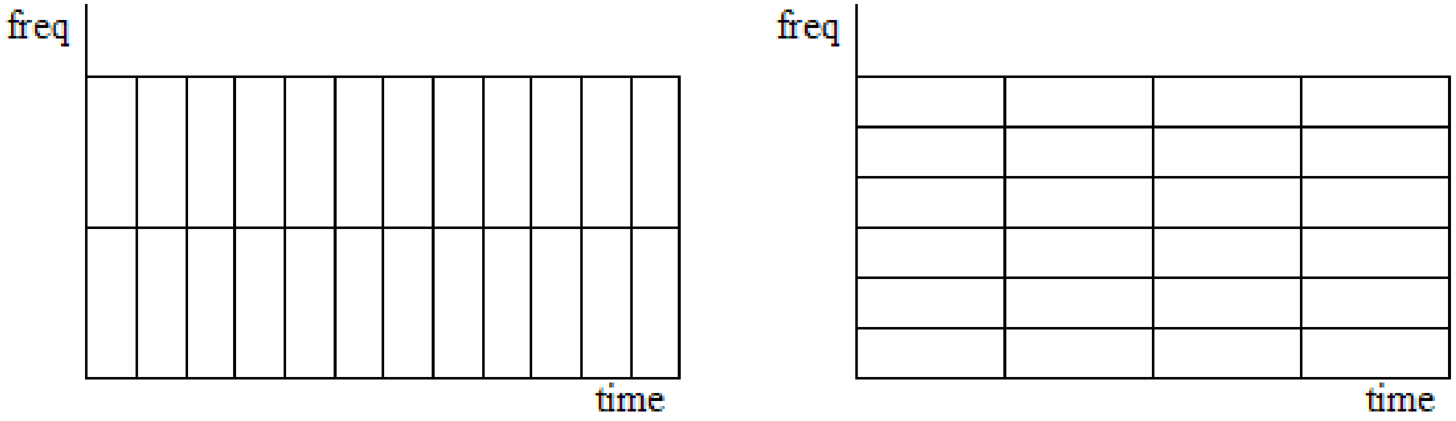
Fourierova transformace



Integrální transformace

Waveletová transformace

- Nevýhodou Fourierovy transformace je absence informace výskytu zvolené frekvenční složky v návaznosti na časovou osu.
- Určitým řešením je využitím tzv. Short Time Fourier Transform (STFT), kdy se signál rozdělí na malé segmenty (jenž se považují za „lokálně“ periodické) na které je následně aplikována FT.
- Volba časové délky segmentu v případě STFT je určitým kompromisem v rozlišení ve frekvenční vs. časové oblasti.

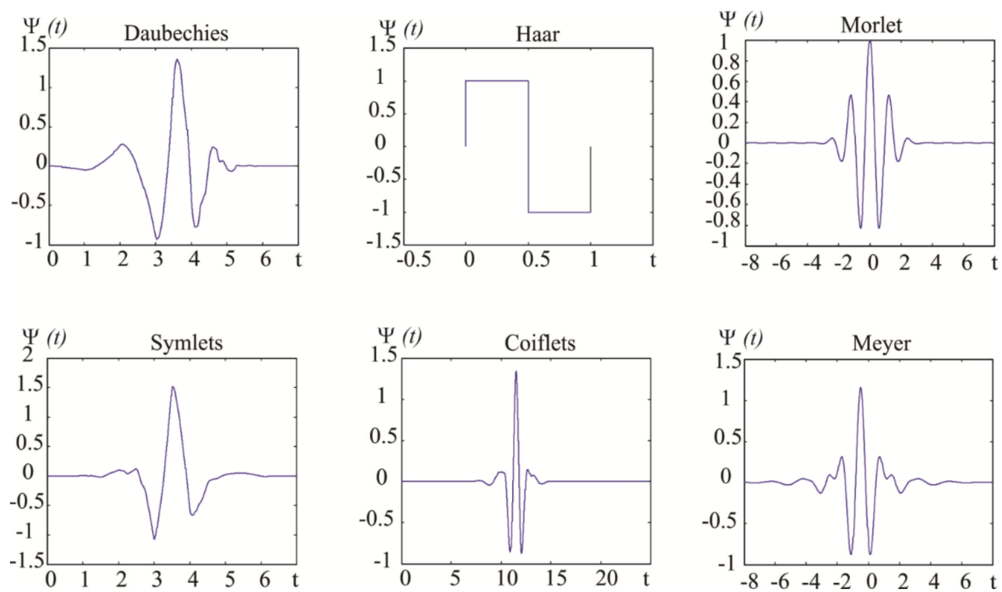


Zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Short-time_Fourier_transform#/media/File:STFT_-_windows.png

Integrální transformace

Waveletová transformace

- Waveletová transformace (WT) transformuje jednorozměrný prostor do prostoru dvourozměrného, majícího však identický rozměr fyzikální. (V případě FT je jedná o transformaci 1D prostoru do opětovně 1D prostoru)
- Základem WT je tzv. víceúrovňová analýza nebo-li multirozklad.
- Na rozdíl od FT je v případě WT signál analyzován nikoliv goniometrickými funkcemi sin/cos, nýbrž prostřednictvím bázových funkcí, označovaných jako Wavelety (vlnky)



Zdroj: https://www.intechopen.com/books/wavelet-transform-and-some-of-its-real-world-applications/empirical-wavelet-transform-based-detection-of-anomalies-in-ulf-geomagnetic-signals-associated-to-se

Integrální transformace

Waveletová transformace

- Mateřská vlnka ψ : určuje základní tvar vlnky
- Otcovská vlnka φ : měřítková funkce (zajišťuje tvorbu vlnek o různém měřítku ze základní, mateřské vlnky)
- Dceřiné vlnky jsou následně odvozovány z rodičovských vlnek za uplatnění měřítka a posunu (translace).
- Pro spojitou WT platí:

$$WT(f) = F(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

Kde $a \in \mathbb{R}$ vyjadřuje dilatační škálový parametr, $b \in \mathbb{R}$ je translační parametr a $\psi(t)$ je mateřský wavelet pro něhož platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

- Inverzní waveletová transformace je pak dána vztahem:

$$WT^{-1}(F) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(a,b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da \right) db$$

Integrální transformace

Waveletová transformace

- Pro diskrétní WT platí:

$$WT(f) = F(a,b) = \sum_t \frac{1}{\sqrt{a}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}$$

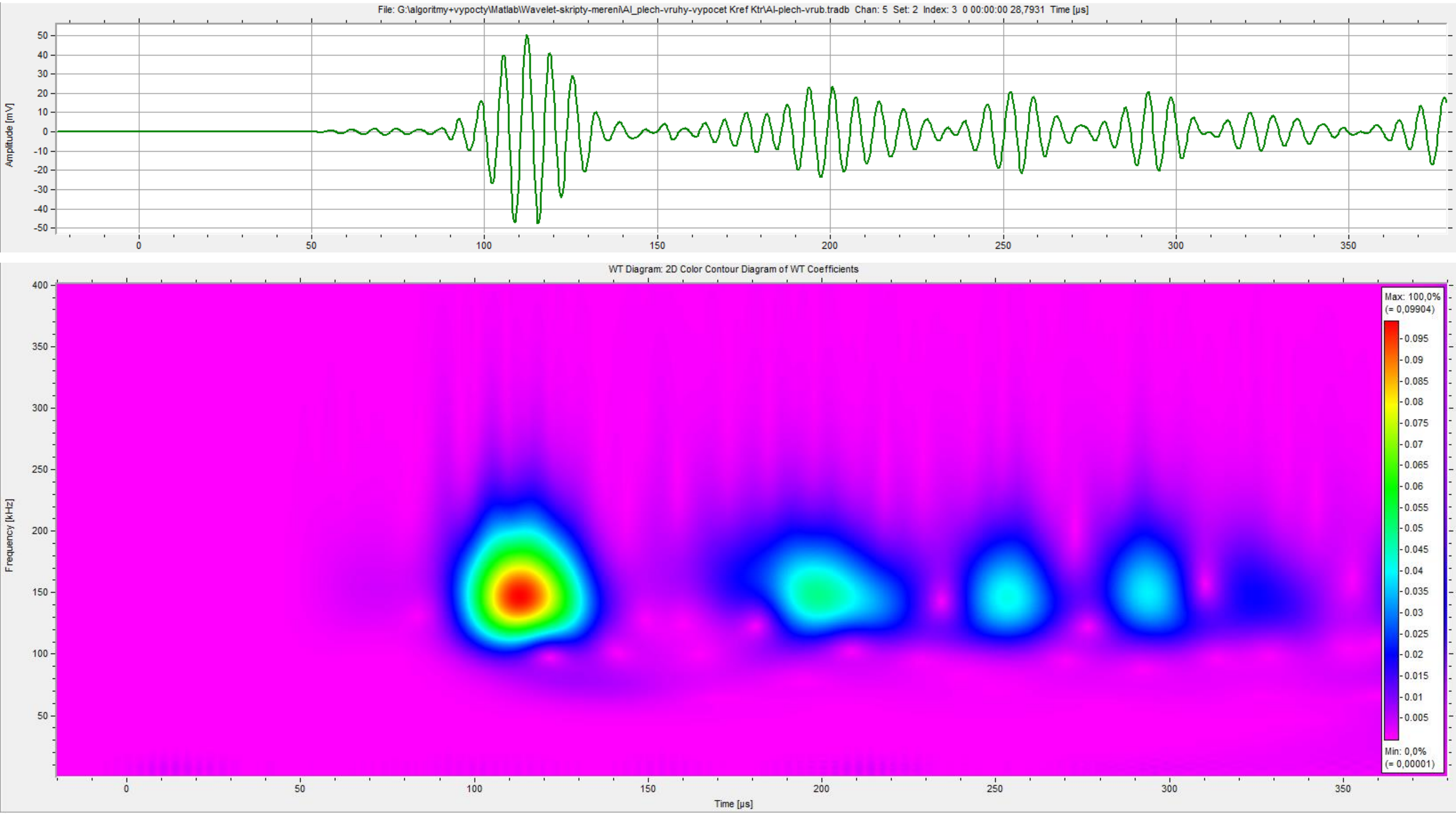
kde $a = 2^{-j}$, $b = k2^{-j}$, přičemž $j, \mathrm{k} \in 1,2, ..$

- Obdobně, pro inverzní WT platí:

$$WT^{-1}(F) = f(t) = \sum_k \sum_j F(a,b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

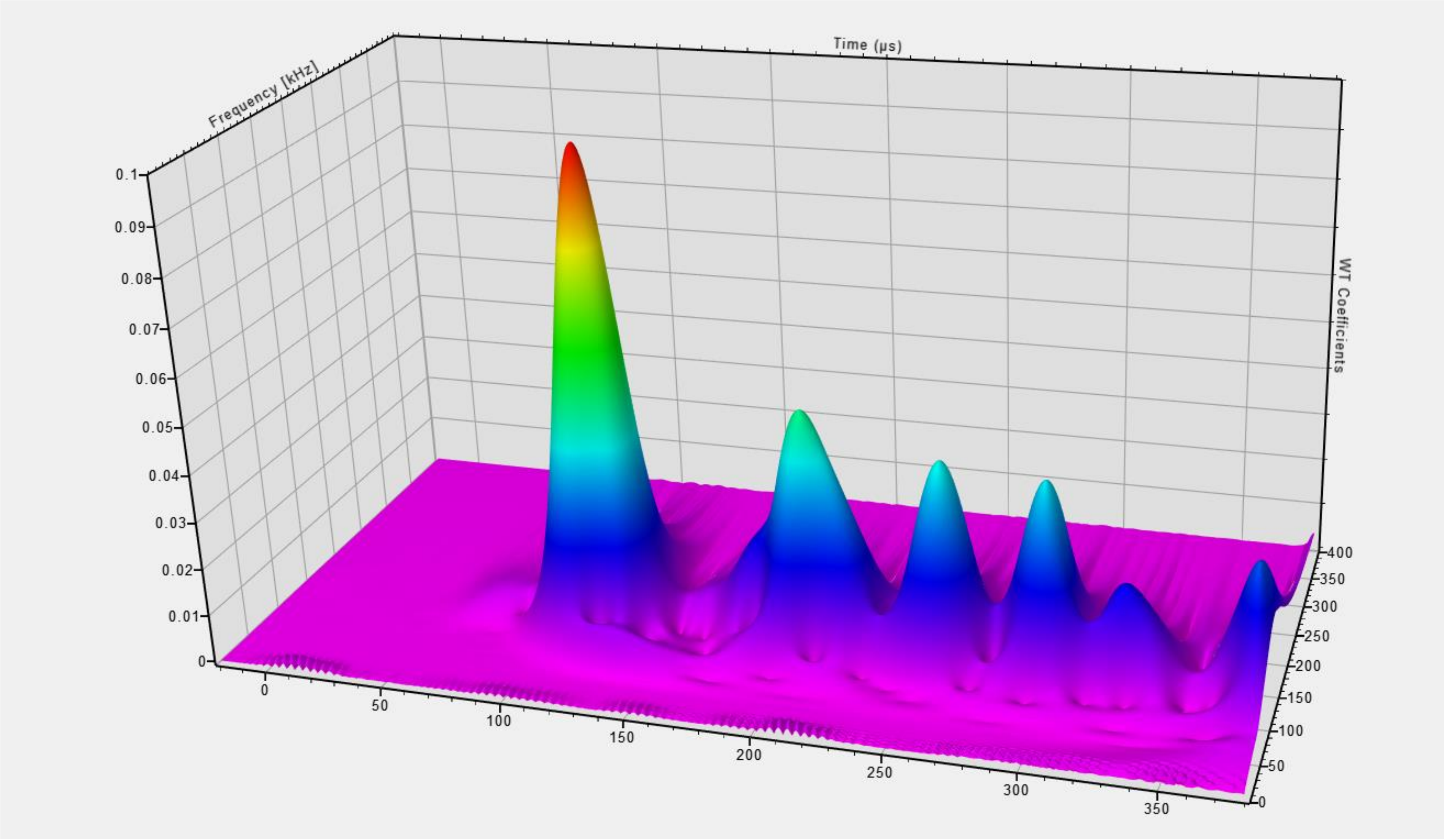
Integrální transformace

Waveletová transformace



Integrální transformace

Waveletová transformace



Integrální transformace

Fourierova vs. Waveletová transformace - srovnání

- FT: obdržíme pouze informace týkající se frekvencí (spektrální informace) bez časové lokalizace
- WT: obdržíme spektrální informace lokalizované v čase
- Nevýhoda WT:
  - nespojitost waveletů (tzn. nejsou všude diferencovatelné)
  - ztráta spektrální přesnosti při výpočtu derivací