Řešení kubické rovnice (goniometrická substituce)

Identifikaci jednotlivých hlavních napětí tenzoru napjatosti $\overline{\overline{\sigma}}$, definovaného v následující formě:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

převedeme na řešení problému vlastních čísel, tedy:

$$det(\overline{\overline{\sigma}} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \tag{1}$$

respektive:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

$$(\sigma_x - \lambda) \begin{vmatrix} \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} - \tau_{xy} \begin{vmatrix} \tau_{yx} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} + \tau_{xz} \begin{vmatrix} \tau_{yx} & \sigma_y - \lambda \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Po úpravě obdržíme:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0, \tag{4}$$

kde:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \tag{5}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix}, \tag{6}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Pro následné řešení kubické rovnice zaveďme substituci $\sigma = \lambda + \frac{I_1}{3}$, obdržíme:

$$\lambda^3 - K_1\lambda - K_2 = 0, \tag{8}$$

kde:

$$K_1 = \frac{I_1^2}{3} - I_2, \tag{9}$$

$$K_2 = \frac{2I_1^3}{27} - \frac{I_1 I_2}{3} + I_3. \tag{10}$$

Zaveďme nyní další substituci ve formě $\lambda = a\,cos\alpha$. Rovnice (8) následně přejde na tvar:

$$a^3 cos^3\alpha - K_1 a\,cos\alpha - K_2 = 0. \tag{11}$$

Pro $cos^3\alpha$ platí:

$$cos^3\alpha = \frac{1}{4}(3cos\alpha + cos3\alpha). \tag{12}$$

S využitím výše uvedené podmínky v rovnici (11) obdržíme:

$$\frac{a^3}{4}cos3\alpha + \Big(\frac{3a^2}{4} - K_1\Big)a\,cos\alpha - K_2 = 0. \tag{13}$$

Volme nyní a tak, aby byla závorka $\left(\frac{3a^2}{4} - K_1\right)$ v rovnici (13) rovna nule. Musí tedy platit:

$$\left(\frac{3a^2}{4} - K_1\right) = 0 \rightarrowtail a = 2\sqrt{\frac{K_1}{3}}. \tag{14}$$

Následně:

$$\frac{a^3}{4} cos3\alpha - K_2 = 0 \rightarrowtail cos3\alpha = \frac{4K_2}{a^3}. \tag{15}$$

Přičemž pro řešení platí:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} arccos \frac{4K_2}{a^3}, \tag{16}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3} arccos \frac{4K_2}{a^3} + \frac{2\pi}{3}, \tag{17}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3} arccos \frac{4K_2}{a^3} - \frac{2\pi}{3}. \tag{18}$$

Následně je možné spočítat proměnnou a, respektive $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a poté $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$