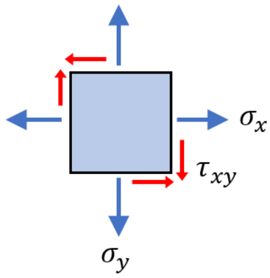
Příklad: Určete hlavní napětí včetně orientace hlavních os v případě napjatosti σ_x= 100 MPa, σ_y = 50 MPa a τ_{xy} = -50 MPa.



Obrázek 1

Varianta 1: Mohrova kružnice

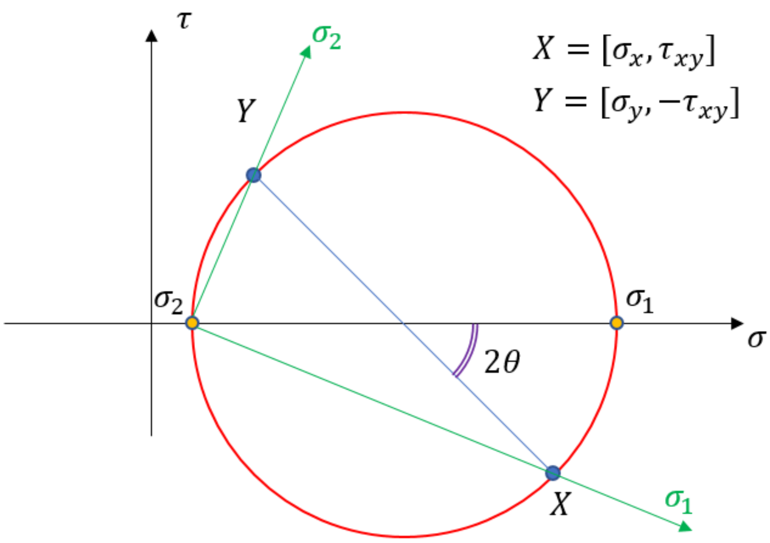
$$\sigma_{1/2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{1}$$

$$\sigma_1 = 130.9 \text{ MPa}, \ \sigma_2 = 19.1 \text{ MPa}$$

Výpočet úhlu natočení hlavních os:

$$\theta = \frac{1}{2} atan \left| \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau_{xy}} \right| \tag{2}$$

$$\theta = 31.71°$$



Obrázek 2

Varianta 2: Vlastní čísla

Sestavení tenzoru napjatosti $\overline{\overline{\sigma}}$:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \tag{3}$$

Definice problému vlastních čísel:

$$\overline{\overline{\sigma}} x = \lambda x \tag{4}$$

Pro netriviální řešení platí:

$$det(\overline{\overline{\sigma}} x - \lambda \mathbf{I}) = 0 \tag{5}$$

Řešení, tedy vlastní čísla λ_i a vlastní vektory $\boldsymbol{v}_i$ je možné uspořádat do diagonální matice $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130.9 & 0 \\ 0 & 19.09 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

respektive matice $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V} = [\boldsymbol{v}^1 \boldsymbol{v}^2] \begin{bmatrix} 0.851 & 0.525 \\ -0.525 & 0.851 \end{bmatrix} \tag{7}$$

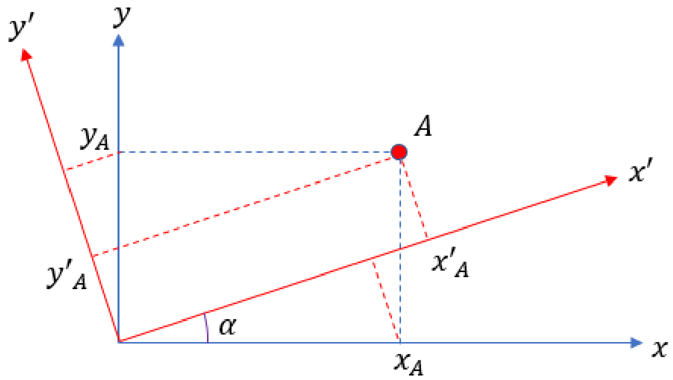
Pozn.: Vlastní vektory jsou normovány Euklidovskou normou $\|\boldsymbol{v}_i\|_{p=2}$

Rovnice (4) s využitím matic $\mathbf{M}, \mathbf{V}$ poté přejde na tvar:

$$\overline{\overline{\sigma}} \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{M} \tag{8}$$

Natočení hlavních os je možné stanovit s využitím matice $\mathbf{V}$. Předtím je však nutné odvodit vztahy pro ortogonální transformaci SS v rovině.

Na následujícím obrázku jsou znázorněny souřadnice bodu A v původním (x, y) a transformovaném SS systému (x', y').



Obrázek 3

Platí:

$$\begin{bmatrix} x'_A \\ y'_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} \tag{9}$$

Pro inverzní transformaci platí:

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_A \\ y'_A \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} x'_A \\ y'_A \end{bmatrix} \tag{10}$$

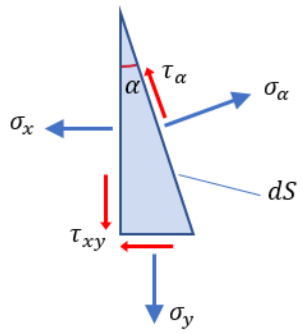
Poznamenejme, že daná transformace je ortogonální transformací vzhledem k platnosti relace $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{T}$.

S využitím matice $\mathbf{V}$ a transformační matice $\mathbf{A}$ obdržíme:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} acos(\mathbf{V}(1,1)) & asin(\mathbf{V}(1,2)) \\ -asin(\mathbf{V}(2,1)) & acos(\mathbf{V}(2,2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31.6^\circ & 31.6^\circ \\ 31.6^\circ & 31.6^\circ \end{bmatrix} \tag{11}$$

Určení napětí na obecně skloněné rovině

Varianta A - Odvození vztahů pro jednotlivé složky tenzoru napjatosti na obecně skloněné rovině



Obrázek 4

Prostřednictvím výše uvedeného obrázku je možné odvodit vztahy pro normálové a smykové napětí na obecně skloněné rovině:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x cos^2\alpha + \sigma_y sin^2\alpha + 2\tau_{xy} sin\alpha\ cos\alpha \tag{12}$$

$$\tau_\alpha = -\left(\sigma_x - \sigma_y\right) sin\alpha\ cos\alpha + \tau_{xy}\left(cos^2\alpha - sin^2\alpha\right) \tag{13}$$

Varianta B - Využití vlastních čísel

Pro transformaci složek tenzoru napjatosti $\overline{\overline{\sigma}}$ platí:

$$\overline{\overline{\sigma}}_\alpha = \mathbf{A}\overline{\overline{\sigma}}\mathbf{A}^T = \mathbf{B}^T\overline{\overline{\sigma}}\mathbf{B} \tag{14}$$

Pro $\alpha = 40°$:

Varianta 1: $\sigma_{\alpha 1} = 30.1$ MPa, $\sigma_{\alpha 2} = 119.9$ MPa, $\tau_\alpha =$ -33.3 MPa

Varianta 2: $\overline{\overline{\sigma}}_\alpha = \begin{bmatrix} 30.1 & -33.3 \\ -33.3 & 119.9 \end{bmatrix}$